Beobachtungen über die Kettenbrüche *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich vorherigen Jahr begonnen hatte, Kettenbrüche einer Untersuchung zu unterwerfen und diesen fast neuen Zweig der Analysis zu entwickeln, haben sich mir unterdessen einige Beobachtungen dargeboten, die unter Umständen, um diese Theorie weiter zu entwickeln und aufzubauen, nicht ungeeignet sein werden. Deswegen, weil die Erforschung dieser Lehre nicht wenig an Hilfe für die Analysis zu verschaffen zu scheint, möchte ich diesen Gegenstand erneut angehen und die Dinge, welche sich hierauf beziehend auftauchen werden, sorgfältig erklären. Es sei also dieser Kettenbruch vorgelegt

$$A + \cfrac{B}{C + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{G + \cfrac{H}{I + \text{etc}}}}}$$

dessen wahrer Wert gefunden werden wird, indem die folgende Reihe ins Unendliche fortgesetzt wird

$$A + \frac{B}{1P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \text{ etc}$$

*Originaltitel: "De fractionibus continuis observationes", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11* 1750, pp. 32-81", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 291 - 349 ", Eneström-Nummer E123, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

in welcher Reihe die Buchstaben P,Q,E,S, etc die folgenden Werte erhalten

$$P = C, Q = EP + D, R = GQ + FP, S = IR + HQ \text{ etc}$$

Diese Reihe aber ist immer konvergent, wie sehr auch immer die Buchstaben B,C,D,E,F etc wachsen oder schrumpfen, solange sie alle positiv sind; ein beliebiger Term ist nämlich kleiner als der vorhergehende, aber größer als der folgende, was das Bildungsgesetz, nach welchem die Werte P,Q,R,S,T etc gebildet werden, sofort aufzeigt.

§2 Wenn also umgekehrt diese unendliche Reihe vorgelegt war

$$\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{GQ} - \frac{BDFH}{RS} + \text{ etc}$$

wird ihre Summe angenehm durch einen Kettenbruch ausgedrückt werden können. Es sei nämlich

$$C = P, \quad E = \frac{Q-D}{P}, \quad G = \frac{R-FP}{Q}, \quad I = \frac{S-HQ}{R} \text{ etc}$$

man wird diesen jener Reihe gleichen Kettenbruch haben

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{D}{\cfrac{Q-D}{D} + \cfrac{F}{\cfrac{R-FP}{Q} + \cfrac{H}{\cfrac{S-HQ}{R} + \cfrac{K}{\text{etc}}}}}}$$

oder

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \cfrac{KRS}{\text{etc}}}}}}$$

Wenn daher diese Reihe gegeben war

$$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} + \text{ etc}$$

wird wegen

$$B = a, \quad D = b : a, \quad F = c : b, \quad H = d : c, \quad K = e : d \ \text{ etc}$$

und

$$P = p, \quad Q = q : p, \quad R = pr : q, \quad S = qs : pv, \quad T = prt : qs \quad \text{etc}$$

der Summe dieser Reihe

$$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} + \text{ etc}$$

der folgende Kettenbruch gleich sein

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{b : a}{\cfrac{aq - bp}{app} + \cfrac{c : b}{\cfrac{p^2(br - cq)}{bqq} + \cfrac{d : c}{\cfrac{q^2(cs - dr)}{cp^2r^2} + \cfrac{e : d}{\cfrac{p^2r^2(dt - es)}{dq^2s^2} + \text{ etc}}}}}}$$

$$= \cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq - bp + \cfrac{acqq}{br - cq + \cfrac{bdrr}{cs - dr + \cfrac{cess}{dt - es + \text{ etc}}}}}}$$

§3 Damit wir diese Dinge an einigen Beispielen illustrieren, wollen wir diese Reihe nehmen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ etc}$$

deren Summe $= \ln(2)$ oder $= \int \frac{dx}{1+x}$ ist, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird; es wird also sein

$$a = b = c = d = \text{etc} = 1, \quad p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3, \quad s = 4 \ \text{ etc}$$

und

$$p = 1, \quad aq - bp = 1, \quad br - cq = 1, \quad cs - dr = 1 \quad \text{etc}$$

Daher wird also

$$\int \frac{dx}{1+x} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

oder der Wert dieses Kettenbruches ist $= \ln(2)$.

§4 Wir wollen nun diese Reihe betrachten

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ etc}$$

deren Summe die Fläche des Kreises ist, der den Durchmesser $= 1$ hat, oder $\int \frac{dx}{1+x^2}$, nachdem nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist. Es wird also sein

$$a = b = c = d = \text{ etc} = 1 \quad \text{und} \quad p = 1, \quad q = 3, \quad r = 5, \quad s = 7 \text{ etc}$$

woher wird

$$\int \frac{dx}{1+xx} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{ etc}}}}}}$$

welches der Kettenbruch von Brouncker selbst ist, welchen er für die Quadratur des Kreises dargeboten hat.

§5 Auf die gleiche Weise, indem andere Reihen dieser Art angenommen werden, werden die folgenden Umwandlungen von Integralformeln in Kettenbrüche hervorgehen, nachdem natürlich nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist:

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{4^2}{3+\cfrac{7^2}{3+\cfrac{10^2}{3+\text{ etc}}}}}} \quad \int \frac{dx}{1+x^4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{4+\cfrac{5^2}{4+\cfrac{9^2}{4+\cfrac{13^2}{4+\text{ etc}}}}}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{5+\cfrac{6^2}{5+\cfrac{11^2}{5+\cfrac{16^2}{5+\text{ etc}}}}}} \quad \int \frac{dx}{1+x^6} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\cfrac{19^2}{6+\text{ etc}}}}}}$$

§6 Daher folgt also, dass allgemein sein wird

$$\int \frac{dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\cfrac{(3m+1)^2}{m+\text{ etc}}}}}}$$

nachdem nach der Integration $x=1$ gesetzt worden ist; und wenn m eine gebrochene Zahl war, wird man haben

$$\int \frac{dx}{1+x^{\frac{m}{n}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{n}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\cfrac{(3m+n)^2}{m+\text{ etc}}}}}}$$

§7 Wir wollen nun die Formel $\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}$, welche integriert, und nach der Integration für $x=1$ gesetzt, diese Reihe liefert

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} - \frac{1}{3m+n} + \text{ etc}$$

Daher wird werden

$a=b=c=d=$ etc $=1$ und $p=n,\ q=m+n,\ r=2m+n,\ s=2m+n$ etc

Daher wird man haben

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\text{ etc}}}}}$$

welcher Kettenbruch mit dem zuletzt gefundenen übereinstimmt.

§8 Es werde nun diese Formel vorgelegt $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, die integriert für $x=1$ gesetzt diese Reihe liefert

$$\frac{1}{n} - \frac{\mu}{\nu(m+n)} + \frac{\mu(\mu+\nu)}{1\cdot 2\nu^2(2m+n)} - \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^3(3m+n)} + \text{ etc}$$

die mit der allgemeinen verglichen gibt

$$a=1,\ \ b=\mu,\ \ c=\mu(\mu+\nu),\ \ d=\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu) \text{ etc}$$

$p=n,\ q=\nu(m+n),\ r=2\nu^2(2m+n),\ s=6\nu^3(3m+n),\ t=24\nu^4(4m+n)$ etc

und

$$\begin{aligned}
&qq-bp = \nu m + (\nu+\mu)n\\
&br-cq = \mu\nu(3\nu-\mu)m + \mu\nu(\nu-\mu)n\\
&cs-dr = 2\mu\nu^2(\mu+\nu)(m(5\nu-2\mu)+n(\nu-\mu))\\
&dt-es = 6\mu\nu^3(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(m(7\nu-3\mu)+n(\nu-\mu))\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher und einer Reduktion man haben wird

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}} =$$

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{\mu n^2}{\nu m+(\nu-\mu)n+\cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{3\nu(\mu+3\nu)(3m+n)^2}{(7\nu-3\mu)m+(\nu-\mu)n+\text{ etc}}}}}}$$

Es sei $\mu = 1$ und $\nu = 2$; es wird sein

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1+x^m}} = \cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{2m+n+\cfrac{6(m+n)^2}{5m+n+\cfrac{20(2m+n)^2}{8m+n+\cfrac{42(3m+n)^2}{11m+n+\cfrac{72(4m+n)^2}{14m+n+\text{ etc}}}}}}}$$

§9 Aber wenn $\nu = 1$ und μ eine ganze Zahl war, werden die folgenden Kettenbrüche hervorgehen

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^2} = \cfrac{1}{n+\cfrac{2n^2}{m-n+\cfrac{1\cdot 3(m+n)^2}{m-n+\cfrac{2\cdot 4(2m+n)^2}{m-n+\cfrac{3\cdot 5(3m+n)^2}{m-n+\cfrac{4\cdot 6(4m+n)^2}{m-n+\text{ etc}}}}}}}$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^3} = \cfrac{1}{n + \cfrac{3n^3}{m - 2n + \cfrac{1\cdot 4(m+n)^2}{-2n + \cfrac{2\cdot 5(2m+n)^2}{-m-2n + \cfrac{3\cdot 6(3m+n)^2}{-2m-2n + \cfrac{4\cdot 7(4m+n)^2}{-3m-2n + \text{ etc}}}}}}}$$

welche Ausdrücke in gleicher Weise wie die folgenden wegen der negativen Größen nicht konvergieren, sondern divergieren.

§10 Alle diese folgen aus der Umwandlung des in §1 gegebenen allgemeinen Kettenbruchs in die unendliche Reihe

$$A + \frac{B}{1P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \text{ etc}$$

Aber dieselbe Reihe wird, indem je zwei Terme addiert werden, in diese transformiert

$$A + \frac{BE}{1Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{ etc}$$

Es ist aber

$$C = P = \frac{Q-D}{E}, \quad G = \frac{S-HQ}{IQ} - \frac{F(Q-D)}{EQ}, \quad L = \frac{V-MS}{NS} - \frac{K(S-HQ)}{IS}, \quad \text{etc}$$

Daher wird diese unendliche Reihe

$$A + \frac{BE}{Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{ etc}$$

in den folgenden Kettenbruch umgewandelt werden

$$A + \cfrac{B}{\frac{Q-D}{E} + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{\frac{E(S-HQ)-FI(Q-D)}{EIQ} + \cfrac{H}{I + \cfrac{K}{\frac{I(V-MS)-KN(S-HQ)}{INS} + \text{ etc}}}}}}$$

welcher von Brüchen befreit in diesen übergeht

$$A+\cfrac{BE}{Q-D+\cfrac{D}{1+\cfrac{FIQ}{E(S-HQ)-FI(Q-D)+\cfrac{EHQ}{1+\cfrac{KNS}{I(V-MS)-KN(S-HQ)+\cfrac{IMS}{1+\text{ etc}}}}}}}$$

§11 Wenn nun umgekehrt diese unendliche Reihe vorgelegt wird

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}+\frac{e}{t}+\text{ etc}$$

und ein Vergleich mit der vorhergehenden angestellt wird, wird sein

$$Q=p,\quad S=\frac{q}{p},\quad V=\frac{pr}{q},\quad X=\frac{qs}{pr},\quad Z=\frac{prt}{qs},\quad \text{etc}$$

und ebenso

$$E=\frac{a}{B},\quad I=\frac{b}{BDF},\quad N=\frac{c}{BDFHK},\quad \text{etc}$$

mit welchen Werten die vorgelegte Reihe in diesen Kettenbruch umgewandelt werden wird

$$\cfrac{a}{p-D+\cfrac{D}{1+\cfrac{bp:1}{Da\left(\frac{q}{p}-Hp\right)-b(p-D)+\cfrac{DHap:1}{1+\cfrac{cq:p}{Hb\left(\frac{pr}{q}-\frac{Mq}{p}\right)-c\left(\frac{q}{p}-Hp\right)+\cfrac{HMbq:p}{1+\cfrac{dp:q}{Mc\left(\frac{qs}{pr}-\text{ etc}\right)}}}}}}}$$

in welchen Kettenbruch unzählige neue Größen eingehen, die in der vorgelegten Reihe nicht enthalten waren.

§12 Weil aber aus §2 diese Reihe

$$\frac{b}{p} - \frac{bd}{pq} + \frac{bdf}{qr} - \frac{bdfh}{rs} + \text{etc}$$

gleich diesem Kettenbruch ist

$$\cfrac{b}{p + \cfrac{dp}{q - d + \cfrac{fpd}{r - fp + \cfrac{hqr}{s - hq + \cfrac{krs}{\text{etc}}}}}}$$

wird, wenn diese Reihe auf die vorhergehende zurückgeführt wird, werden

$$b = BE, \quad d = \frac{-DFI}{E}, \quad f = \frac{-HKN}{I}, \quad \text{etc}$$

$$p = Q, \quad q = S, \quad r = V, \quad s = X, \quad \text{etc}$$

Daher wird der im vorhergehenden Paragraphen gegebene Kettenbruch in diesen verwandelt werden

$$A + \cfrac{BE}{Q - \cfrac{DFI - Q}{ES + DFI - \cfrac{EHKN - QS}{IV + HKNQ - \cfrac{IMUR - SV}{NX + MOERS + \text{etc}}}}}$$

das Bildungsgesetz welcher Progression leicht erkannt wird.

§13 Aber jene Reihe

$$A + \frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \text{etc}$$

die wir zuerst aus dem allgemeinen Kettenbruch gefunden haben, wird leicht in diese Form transformiert

$$A + \frac{B}{2P} + \frac{BE}{2Q} - \frac{BDG}{2PR} + \frac{BDFI}{2QS} - \frac{BDFHL}{2RT} + \text{etc}$$

die, wenn die Buchstaben C,E,G,I etc durch die übrigen mit Hilfe der gegebenen Gleichungen ausgedrückt werden, in diese übergeht

$$A\frac{B}{2P}+\frac{B(Q-D)}{2PQ}-\frac{BD(R-FP)}{2PQR}+\frac{BDF(S-HQ)}{2QRS}-\text{ etc}$$

welcher deshalb dieser Kettenbruch gleich ist

$$A+\cfrac{B}{P+\cfrac{DP}{Q-D+\cfrac{FPQ}{R-FP+\cfrac{HQR}{S-HQ+\text{ etc}}}}}$$

§14 All diese folgen also aus der Betrachtung von Kettenbrüchen unmittelbar und viele Beobachtungen dieser Art habe ich schon in der oberen Abhandlung mitgeteilt. Nun also, nachdem wir diese Dinge hinter uns gelassen haben, schreite ich zu anderen voran und möchte einige Arten so zu Kettenbrüchen zu gelangen wie die Werte gegebener Brüche dieser Art durch Integrationen anzugeben, darlegen. Zuerst möchte ich deshalb, weil hier der Brouncker'sche Ausdruck für die Quadratur des Kreises nicht nur bewiesen worden ist, sondern auch gleichsam a priori gefunden worden ist, andere ähnliche entweder von Brouncker selbst oder von Wallis gefundene Ausdrücke einer Untersuchung unterwerfen; sie werden nämlich von Wallis aufgezählt, und es wird nicht hinreichend klar kenntlich gemacht, ob Brouncker alle gefunden hat oder lediglich den, welcher für die Quadratur des Kreises dargeboten worden war. Später werde ich auch jene übrigen Kettenbrüche, die von weiterem Umfang scheinen, aus höchst verschiedenen Prinzipien beweisen und werde lehren, um Vieles mehr dieser Art zu finden.

§15 Was sich aber bei Wallis befindet, geht darauf zurück, dass das Produkt dieser zwei Kettenbrüche $= a^2$ ist:

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\text{etc}}}}$$

und

$$a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)+\text{etc}}}}$$

Weil also auf die gleiche Weise gilt

$$(a+1)^2 = a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\text{etc}}} \times a+3+\cfrac{1}{2(a+3)+\cfrac{9}{2(a+3)+\text{etc}}}$$

wird auf diese Weise, indem ins Unendliche fortgeschritten wird, aufgefunden werden

$$a\cdot\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)(a+8)(a+12)(a+12)}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)(a+10)(a+10)(a+14)} \quad \text{etc} =$$

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\text{etc}}}}$$

§16 Wenn nun dieses aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkt durch die in der vorhergehenden Abhandlung angegebene Methode erforscht wird, wird aufgefunden werden, dass sein wird

$$\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)\text{etc}}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)\text{etc}} = \frac{\int x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}$$

Deshalb wird der Wert dieses Kettenbruches

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\ \text{etc}}}}$$

diesem Ausdruck gleich werden

$$\frac{a\int x^{a+1}dx : \sqrt{1-x^4}}{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^4}}$$

nachdem nach jeder der beiden Integrationen $x=1$ gesetzt wurde.

§17 Dieser Lehrsatz, mit welchem der Wert eines sich ziemlich weit erstreckenden Kettenbruches durch Integralformeln ausgedrückt wird, ist umso mehr bemerkenswert, um so weniger offenkundig seine Gültigkeit ist. Denn obwohl jener Fall, in dem $a = 2$ ist, schon zuvor gefunden worden ist und sein Wert durch die Quadratur des Kreises erklärt worden ist, folgen dennoch die übrigen Fälle aus ihm nicht. Wenn nämlich dieser Kettenbruch auf die anfangs vorgeschriebene Weise in eine Reihe umgewandelt wird, wird zu so verwickelten Formeln gelangt, dass ihre Summe in keinster Weise berechnet werden kann, außer im Fall $a = 2$. Deswegen habe ich schon vor langer Zeit viel Mühe darauf verwendet, dass ich so die Gültigkeit dieses Lehrsatzes beweisen wie einen Weg entdecken würde, auf welchem sich a priori zu diesem Kettenbruch selbst gelangen ließe; diese Untersuchung schien mit umso schwerer, eine umso größere Nützlichkeit ich aus ihr zu entspringen glaubte. Solange ich aber den ganzen Eifer vergebens für diese Aufgabe aufgebracht habe, habe ich im höchsten Maße bedauert, dass die von Brouncker gebrauchte Methode niemals dargelegt worden ist und vielleicht ganz und gar verloren gegangen ist.

§18 So weit freilich aus der Wallis'schen Musterung bekannt ist, ist Brouncker auf diese Form durch Interpolation dieser Reihe geführt worden

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\text{ etc}$$

deren Zwischenterme die Quadratur des Kreises selbst zu liefern, Wallis bewiesen hatte. Und daher wird der Anfang dieser von Brouncker unternommenen Interpolation aufgezeigt. Er wird nämlich gesagt, sich vorgelegt zu haben, die einzelnen Brüche $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6}$ etc in zwei Faktoren aufzulösen, die alle untereinander eine ununterbrochene Progression festlegen. Wenn deshalb war

$$AB = \frac{1}{2} \quad CD = \frac{3}{4} \quad EF = \frac{5}{6} \quad GH = \frac{7}{8} \quad \text{etc}$$

und die Größen A,B,C,D,E etc eine ununterbrochene Progression festlegen, geht jene Reihe in diese über

$$AB + ABCD + ABCDEF + \text{etc}$$

welche auf diese Form reduziert von selbst interpoliert wird; es wird nämlich der Term, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, $= A$ sein und der Term, der den Index $\frac{3}{2}$ hat, $= ABC$ und so weiter. Daher wird diese ganze Interpolation auf die Auflösung der einzelnen Brüche in zwei Faktoren zurückgeführt.

§19 Aus dem Gesetz der Kontinuität wird aber sein

$$BC = \frac{2}{3} \quad DE = \frac{4}{5} \quad FG = \frac{6}{7} \quad \text{etc}$$

Weil also ist

$$A = \frac{1}{2B} \quad B = \frac{2}{3C} \quad C = \frac{3}{4D} \quad D = \frac{4}{5E}$$

wird sofort erhalten

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \quad \text{etc}$$

welches aber die von Wallis zuerst aufgestellte Formel ist, mit welcher er die Quadratur des Kreises ausgedrückt hat, und in höchstem Maße vom Brouncker'schen Ausdruck abweicht. Daher, weil diese Formel beim Untersuchen der Interpolation auf diese Weise sich so leicht zeigt, hat man sich umso mehr zu wundern, dass Brouncker, denselben Weg beschreitend, zu einem dermaßen unterschiedlichem Ausdruck gelangt ist; es scheint nämlich kein Weg übrig zu sein, der zu einem Kettenbruch führen würde. Und es ist in der Tat nicht zu glauben, dass Brouncker mit Vorsatz den Wert von A durch einen Kettenbruch ausdrücken wollte, sondern eher einer bestimmten eigenen Methode folgenden quasi unfreiwillig auf ihn gestoßen ist, weil zu der Zeit Kettenbrüche vollkommen unbekannt waren und bei dieser Begebenheit zuerst Erwähnung gefunden haben. Aus diesen lässt sich hinreichend sicher folgern, dass eine zu Kettenbrüchen dieser Art führende Methode gegeben ist, obwohl sie nun freilich im Verborgenen zu liegen scheint.

§20 Obwohl ich mich aber lange mit dem Wiederauffinden dieser Methode erfolglos beschäftigt habe, bin ich dennoch auf eine andere Weise gestoßen, Interpolationen von Reihen dieser Art durch Kettenbrüche auszuführen; diese hat mir aber von den Brouncker'schen in höchstem Maße verschiedene Ausdrücke geliefert. Dennoch hoffe ich indes, dass es nicht ohne jeden Nutzen sein wird, diese Methode dazulegen, weil mit ihrer Hilfe Kettenbrüche wieder aufgefunden werden, deren Werte schon anderswoher bekannt sind und durch Quadraturen dargeboten werden können. Weil ich nämlich darauf eine andere Methode angeben werde, die Werte irgendwelcher Kettenbrüche durch Quadraturen auszudrücken, werden daher außerordentliche Vergleiche von Integralformeln entspringen, zumindest in dem Fall, in welchem der Variable nach der Integration ein bestimmter Wert zugeteilt wird; viele Vergleiche dieser Art habe ich in der vorhergehenden Abhandlung über aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkte dargeboten.

§21 Damit ich also nun die von mir gefundene Interpolationsweise darlege, sei diese sich sehr weit erstreckende Reihe vorgelegt

$$\frac{p}{p+2q}+\frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)}+\frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)}+\text{ etc}$$

deren Term des Index' $\frac{1}{2}=A$ sei, der Term des Index' $\frac{3}{2}=ABC$, der Term des Index' $\frac{5}{2}=ABCDE$ etc. Daher wird also sein

$$AB=\frac{p}{p+2q} \quad CD=\frac{p+2r}{p+2q+2r} \quad EF=\frac{p+4r}{p+2q+4r} \quad \text{etc}$$

und aus dem Kontinuitätsgesetz

$$BC=\frac{p+r}{p+2q+r} \quad DE=\frac{p+3r}{p+2q+3r} \quad FG=\frac{p+5r}{p+2q+5r} \quad \text{etc}$$

und so weiter.

§22 Um die Brüche zu beseitigen, werde festgelegt

$$A=\frac{a}{p+2q-r} \quad B=\frac{b}{p+2q} \quad C=\frac{c}{p+2q+r} \quad D=\frac{d}{p+2q+2r} \quad \text{etc}$$

und es wird sein

$$ab=(p+2q-r)p, bc=(p+2q)(q+r), cd=(p+2q+r)(p+2r),$$
$$de=(p+2a+2r)(p+3r) \quad \text{etc}$$

Es werde nun

$$d=m-r+\frac{1}{\alpha} \quad b=m+\frac{1}{\beta} \quad c=m+r+\frac{1}{\gamma}$$
$$d=m+2r+\frac{1}{\delta} \quad e=m+3r+\frac{1}{\varepsilon}$$

in welchen Substitutionen die ganzen Anteile eine arithmetische Progression festlegen, deren konstante Differenz r ist, was die Progression jener Produkte selbst erfordert. Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, werden die folgenden Gleichungen hervorgehen, indem der Kürze wegen festgelegt wird

$$p^2 + 2pq - pr - m^2 + mr = P$$

und

$$2r(p+q-m) = Q:$$

$$\begin{array}{lll}
P\alpha\beta & -(m-r)\alpha & = m\beta + 1 \\
(P+Q)\beta\gamma & -m\beta & = (m+r)\gamma + 1 \\
(P+2Q)\gamma\delta & -(m+r)\gamma & = (m+2r)\delta + 1 \\
(P+3Q)\delta\varepsilon & -(m+2r)\delta & = (m+3r)\varepsilon + 1 \\
\text{etc} & &
\end{array}$$

§23 Aus diesen Gleichungen gehen also die folgenden Vergleiche der Buchstaben α,β,γ,δ etc zueinander hervor:

$$\alpha = \frac{m\beta+1}{p\beta-(m-r)} = \frac{m}{p} + \cfrac{p(p+2q-r):p^2}{-\cfrac{m-r}{p}+\beta}$$

$$\beta = \frac{(m+r)\gamma+1}{(P+Q)\gamma-m} = \frac{m+r}{P+Q} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{-\cfrac{m}{P+Q}+\gamma}$$

$$\gamma = \frac{(m+2r)\delta+1}{(P+2Q)\delta-(m+r)} = \frac{m+2r}{P+2Q} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{-\cfrac{m+r}{P+2Q}+\delta}$$

Wenn also der Kürze wegen festgelegt wird

$$p^2 + 2pq - mp - mq + qr = R$$

und

$$pr + qr - mr = S$$

und die Werte der angenommenen Buchstaben ununterbrochen in den vorhergehenden eingesetzt werden, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$\alpha = \frac{m}{p} + \cfrac{p(p+2q-r):p^2}{\cfrac{2rR}{P(P+Q)} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{\cfrac{2r(R+S)}{(P+Q)(P+2Q)} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{\cfrac{2r(R+2S)}{(P+2Q)(P+3Q)} + \text{ etc}}}}$$

§24 Weil also $a = m - r = \frac{1}{\alpha}$ ist, wird man haben

$$a = m - r + \cfrac{P}{m + \cfrac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR + \cfrac{(p+r)(p+2q)P(P+2Q)}{2r(R+S) + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)(P+Q)(P+3Q)}{2r(R+2S) + \text{ etc}}}}}$$

Daher wird der Term der vorgelegten Reihe

$$\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} + \text{ etc}$$

dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, also sein

$$A = \frac{a}{p+2q-r}$$

Weil ja aber der allgemeine Term dieser Reihe, der den Index n hat, ist

$$= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$$

wird der gefundene Kettenbruch oder der Wert des Buchstaben a sein

$$= (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

nachdem nach jeder der beiden Integrationen $y = 1$ gesetzt worden ist.

§25 Weil aber in unserem Kettenbruch der beliebige Buchstabe m enthalten ist, wird man unzählige Kettenbrüche haben, die denselben Wert haben und der bekannt ist; es wird förderlich sein, dass aus diesen die besonderen betrachtet werden. Es sei also zuerst

$$m - r = p \text{ oder } m = p + r$$

es wird sein

$$P = 2p(q-r), \quad Q = 2r(q-r), \quad R = p(q-r) \text{ und } S = r(q+r)$$

woher werden wird

$$a = p + \cfrac{2p(q-r)}{p + r + \cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r + \cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r + \cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r + \text{ etc}}}}}$$

Aber wenn $r > q$ war, damit der Kettenbruch nicht negativ wird, wird sein

$$a = \cfrac{p}{1 + \cfrac{2(r-q)}{p + 2q - r + \cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r + \cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r + \cfrac{(p+3q+r)(p+3r)}{r + \text{ etc}}}}}}$$

§26 Es sei nun $m = p + q$, damit P und Q verschwinden; es wird aber sein

$$P = q(r-q) \text{ und } R = q(r-q)$$

und daher wird hervorgehen

$$a = p + q - r + \cfrac{q(r-q)}{p + q + \cfrac{p(p+2q-r)}{2r + \cfrac{(p+r)(p+2q)}{2r + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)}{2r + \text{ etc}}}}}$$

welcher Kettenbruch sogar dem vorhergehenden gleich ist, auch wenn die Formen selbst verschieden sind.

§27 Es werde $m = p + 2q$ gesetzt und wird sein

$$\begin{aligned} P &= 2q(r-p-2q) = -2q(p+2q-r) \\ Q &= -2qr \\ R &= -q(p+2q-r) \end{aligned}$$

und

$$S = -qr$$

Aus diesen wird deshalb der folgende Kettenbruch erhalten werden:

$$a = p + 2q - r - \cfrac{2q(p+2q-r)}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{r + \cfrac{(p+r)(p+2q+r)}{r + \cfrac{(p+2r)(p+2q+2r)}{r + \text{ etc}}}}}$$

So gehen unzählige Kettenbrüche hervor, die alle denselben Wert a haben, der durch Integralformeln gefunden worden ist

$$= (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = (p+2q-2r)\frac{\int y^{p+2q-2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

§28 Bevor wir weiter fortschreiten, wollen wir einige Fälle betrachten. Es sei also $r = 2q$ und es wird sein

$$a = p\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{4q}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{4q}}}$$

Weil also wird

$$\begin{aligned} P &= p^2 + 2mq - m^2 \\ Q &= 4q(p+q-m) \\ R &= p^2 + 2pq + 2qq - mp - mq \end{aligned}$$

und

$$S = 2q(p+q-m)$$

wird im Allgemeinen sein

$$a = m - 2q + \cfrac{P}{m + \cfrac{p^2(P+Q)}{4qR + \cfrac{(p+2q)^2 P(P+2Q)}{4qR(R+S) + \cfrac{(p+4q)^2(P+Q)(P+3Q)}{4q(R+2S) + \text{ etc}}}}}$$

§29 Wenn wir aber für m jene verschiedenen Werte einsetzen, werden die folgenden bestimmten Kettenbrüche hervorgehen

$$a = p - \cfrac{2pq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}$$

oder anstelle dieses Kettenbruches wegen $r > q$

$$a = \cfrac{p}{1 + \cfrac{2q}{p + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}}$$

Darauf wird aus §26 für diesen Fall dieser Bruch erhalten

$$q = p - q + \cfrac{qq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}$$

Drittens wird aber §27 diesen Kettenbruch verschaffen

$$a = p - \cfrac{2pq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{ etc}}}}}$$

welcher mit dem zuerst hier dargebotenen übereinstimmt, so dass man nur zwei einfachere Kettenbrüche für diesen Fall hat, in dem $r = 2q$ ist.

§30 Es werde nun weiter $q = p = 1$ gesetzt, dass wird

$$a = \frac{\int yydy : \sqrt{1-y^4}}{\int dy : \sqrt{1-y^4}}$$

es wird zuerst sein

$$a = 1 - \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{2 + \cfrac{3 \cdot 5}{2 + \cfrac{5 \cdot 7}{2 + \text{ etc}}}}}$$

Des Weiteren wird man aber haben

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc}}}}}}$$

Daher folgt, dass sein wird

$$\frac{\int dy : \sqrt{1-y^4}}{\int yydy : \sqrt{1-y^4}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc}}}}}$$

welcher Fall im §16 gegebenen Ausdruck enthalten ist, aus welchem jene noch nicht hinreichend bewiesen Formel noch mehr bestätigt wird. Nachdem nämlich dort $a = 3$ gesetzt wurde, wird werden

$$3\frac{\int x^4 dx : \sqrt{1-x^4}}{\int xxdx : \sqrt{1-x^4}} = \frac{\int dx : \sqrt{1-x^4}}{\int xxdx : \sqrt{1-x^4}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc}}}}}$$

so dass nun freilich feststeht, dass jene in §16 dargebotene Formel in den Fällen wahr ist, in denen einmal $a = 2$ und dann auch $a = 3$ ist; bald aber wird ihre Gültigkeit im weitesten Sinne aufgezeigt werden.

§31 Es sei $q = \frac{1}{2}$ und $p = 1$; während $r = 2q = 1$ bleibt, wird sein

$$a = \frac{\int ydy : \sqrt{1-y^2}}{\int dy : \sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}$$

während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist. Allgemein wird deshalb sein

$$P = 1 + m + m^2, \quad Q = 3 - 2m$$

$$R = \frac{5-3m}{2} \quad \text{und} \quad S = \frac{3-2m}{2}$$

und daher

$$a = m - 1 + \cfrac{1 + m + m^2}{m + \cfrac{1^2(4 - m - m^2)}{5 - 3m + \cfrac{2^2(1 + m - m^2)(7 - 3m - m^2)}{8 - 5m + \cfrac{3^2(4 - m - m^2)(10 - 5m - m^2)}{11 - 7m + \text{ etc}}}}}$$

In den dargelegten speziellen Fällen wird aber sein

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \text{ etc}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \text{ etc}}}}}$$

und

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1:4}{\frac{3}{2} + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{ etc}}}}}} = 2 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{ etc}}}}}$$

§32 Damit der Gebrauch dieser Formeln bei Interpolationen verstanden wird, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \text{ etc}$$

deren Term des Index' $\frac{1}{2}$ gefunden werden müssen soll, der $= A$ sei; es wird also sein

$$p = 2, r = 1 \quad \text{und} \quad q = -\frac{1}{2}$$

Es werde festgelegt

$$A = \frac{a}{p + 2q - r}$$

es wird sein

$$A = \frac{a}{0}$$

woher der Übelstand der gegebenen Formeln, wenn $p + 2q - r = 0$ wird, zur Genüge eingesehen wird. Dennoch kann indes die Aufgabe bewältigt werden, indem der Term des Index' $\frac{3}{2}$ gesucht wird, wenn dieser $= Z$ war, wird $A = \frac{2}{3}Z$ sein; aber $\frac{1}{2}Z$ wird der Term des Index' $\frac{1}{2}$ dieser Reihe sein

$$\frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{ etc}$$

die mit der allgemeinen verglichen gibt

$$p = 4, \quad r = 1, \quad q = -\frac{1}{2}$$

so dass wird

$$Z = \frac{2\int y^2 dy : \sqrt{1-y^2}}{\int y^3 dx : \sqrt{1-y^2}} = \frac{3\int dy : \sqrt{1-y^2}}{2\int y dy : \sqrt{1-y^2}} = \frac{3}{4}\pi$$

und $A = \frac{\pi}{2}$. Weil also durch §34 ist

$$Z = a \quad \text{und} \quad A = \frac{2}{3}Z = \frac{2}{3}a$$

wird zuerst allgemein wegen

$$P = 8 + m - m^2, \quad Q = 7 - 2m$$

$$R = \frac{23 - 7m}{2} \quad \text{und} \quad S = \frac{7 - 2m}{2}$$

sein

$$A = \frac{2}{3}a = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2(m-1)}{3} + \cfrac{2(8+m-m^2)}{3m + \cfrac{2 \cdot 4 \cdot 3(15-m-m^2)}{23 - 7m + \cfrac{3 \cdot 5(8+m-m^2)(22-3m-m^2)}{30 - 9m + \cfrac{4 \cdot 6(15-m-m^2)(29-5m-m^2)}{37 - 11m + \text{ etc}}}}}$$

§33 Indem aber spezielle Fälle entwickelt werden, wird sein

$$a = \frac{3}{4}\pi = 4 - \cfrac{12}{5 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1\cdot 3}{2 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

oder auch

$$\frac{3}{4}\pi = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1\cdot 4}{1 + \cfrac{2\cdot 5}{1 + \cfrac{3\cdot 6}{1 + \cfrac{4\cdot 7}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

Auf die gleiche Weise wird man durch §26 haben

$$a = \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{2} - \cfrac{3:4}{\frac{7}{2} + \cfrac{2\cdot 4}{2 + \cfrac{3\cdot 5}{2 + \cfrac{4\cdot 6}{2 + \cfrac{5\cdot 7}{2 + \text{ etc}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1\cdot 3}{2 + \cfrac{2\cdot 4}{2 + \cfrac{3\cdot 5}{2 + \cfrac{4\cdot 6}{2 + \text{ etc}}}}}}$$

schließlich wird der in §27 dargelegte Fall geben

$$a = \frac{3}{4}\pi = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3\cdot 4}{1 + \cfrac{4\cdot 5}{1 + \cfrac{5\cdot 6}{1 + \text{ etc}}}}}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cfrac{4 \cdot 5}{1 + \text{ etc}}}}}}$$

welcher Ausdruck mit einem gewissen oberen in §31 dargebotenen übereinstimmt.

§34 Aus dieser Interpolationsmethode haben wir deshalb unzählige Kettenbrüche erhalten, deren Werte durch Quadraturen von Kurven oder Integralformeln angegeben werden können. Weil aber diese Kettenbrüche am Anfang unregelmäßig sind, werden die Anfänge, die die Unregelmäßigkeit enthalten, abgetrennt, dass man überall nach demselben Gesetz fortschreitende Kettenbrüche hat. So wird aus §25, indem festgelegt wird

$$p + 2q - r = f \text{ und } p + r = h$$

die folgende Gleichung hervorgehen

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{ etc}}}} =$$
$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

welche Gleichung immer reell ist, wenn nicht $f = h$ ist, werde $f = h + dw$ gesetzt und es wird aufgefunden werden

$$\frac{\int y^{h+r+dw-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = 1 - rdw\int \frac{dx}{x^{r+1}} \int \frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}$$

nachdem nach der Integration $x=1$ gesetzt worden ist. Daher wird also sein

$$r+\cfrac{hh}{r+\cfrac{(h+r)^2}{r+\cfrac{(h+2r)^2}{r+\text{ etc}}}}$$

$$=\frac{r+hr(h-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-hr\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}=\frac{r(h-r)^2\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{n-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-r(h-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

Aber aus der Natur der Integrale ist

$$\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}=\frac{-1}{rx^r}\int\frac{x^{h+2r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1-x^{2r}}=\frac{1}{r}\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}$$

nachdem $x=1$ gesetzt wurde. Deshalb wird man haben

$$r+\cfrac{hh}{r+\cfrac{(h+r)^2}{r+\text{ etc}}}=\frac{r+h(h-r)\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}}{1-h\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}}=\frac{1-(h-r)\int\frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}{\int\frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}$$

welche Form aber mit der übereinstimmt, die in §7 gegeben worden ist.

§35 Auf die gleiche Weise folgt aus §26, indem $p=f$ und $p+2q-r=h$ gesetzt wird, dass sein wird

$$2r+\cfrac{fh}{2r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{2r+\cfrac{(f+2r)(h+2r)}{2r+\text{ etc}}}}=\frac{2(r-f)(r-h)\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}-h(f+h-3r)\int\frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}{2h\int\frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}-(f+h-r)\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}$$

Weil ja aber die Formel unverändert bleibt, wenn f und h miteinander vertauscht werden, ist es offenbar, dass sein muss

$$\frac{h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}=\frac{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

nachdem nach allen Integrationen $y=1$ gesetzt worden ist. In der Tat ist dieser Lehrsatz schon in denen enthalten, die ich in der vorhergehenden Dissertation über aus unendlich vielen Faktoren bestehende Produkte dargeboten habe; dort habe ich nämlich viele Lehrsätze dieser Art hervorgebracht und bewiesen.

§36 Hier verdient aber gleicher Weise der Fall bemerkt zu werden, in dem $f=h+r$ ist; in diesem verschwindet nämlich so der Zähler wie der Nenner des gefundenen Bruches. Nachdem aber wie zuvor $f=h+r+dw$ gesetzt und die Rechnung durchgeführt wurde, wird entspringen

$$2r+\cfrac{h(h+r)}{2r+\cfrac{(h+r)(h+2r)}{2r+\cfrac{(h+2r)(h+3r)}{2r+\text{etc}}}}=\frac{h+2h(r-h)\int\frac{x^{h-r}dx}{1+x^r}}{-1+2h\int\frac{x^{h-r}}{1+x^r}}$$

Daher, wenn $h=r=1$ gesetzt wird, wird man haben

$$2+\cfrac{1\cdot 2}{2+\cfrac{2\cdot 3}{2+\cfrac{3\cdot 4}{2+\cfrac{4\cdot 5}{2+\text{etc}}}}}=\frac{1}{2\ln(2)-1}$$

Im Übrigen, wenn die Gleichung in §27 auf dieselbe Weise behandelt wird, wird die Form jener selbst, die ich aus §25 gefunden habe, vollkommen gleich hervorgehen.

§37 Nachdem diese Dinge dargelegt worden sind, mit welchen die Interpolation von Reihen auf Kettenbrüche zurückgeführt wird, kehre ich zu Brouncker'schen Ausdrücken zurück und werde eine natürliche Methode angeben, nicht nur zu denen zu gelangen, sondern auch eine solcher Art, die von Brouncker selbst benutzt worden zu sein scheint. Aber die bisher gefundenen Kettenbrüche weichen aber im höchsten Maße von den Bronucker'schen ab, weil die Werte der Buchstaben A,B,C,D etc bei der erläuterten Methode so voneinander abhängen, dass sie leicht miteinander verglichen werden können, bei der Brouncker'schen Methode aber voneinander verschieden hervorgehen, dass deren gegenseitige Relation nicht erkannt wird. Dieser Unterschied selbst hat mich schließlich zum Fund eine anderen nun zu eröffnenden Methode geführt.

§38 Bevor ich aber die Interpolationsmethode selbst darlege, wird es gefällig sein, dass das folgende sich sehr weit erstreckenden Lemma vorausgeschickt wird. Wenn es unzählige Größen $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ etc gab, die so voneinander abghängen, dass gilt

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta - m\alpha - n\beta - \chi = 0\\
&\beta\gamma - (m+s)\beta - (n+s)\gamma - \chi = 0\\
&\gamma\delta - (m+2s)\gamma - (n+2s)\delta - \chi = 0\\
&\delta\varepsilon - (m+3s)\delta - (n+3s)\varepsilon - \chi = 0\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

und den Buchstaben $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ etc die folgenden Werte zugeteilt werden

$$\begin{aligned}
\alpha &= m+n-s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{a}\\
\beta &= m+n+s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{b}\\
\gamma &= m+n+3s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{c}\\
\delta &= m+n+5s + \frac{ss-ms+ns+\chi}{d}\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

werden die oberen Gleichungen in die folgenden ähnlichen transformiert werden

$$\begin{aligned}
&ab - (m-s)a - (n+s)b - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&bc - mb - (n+2s)c - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&cd - (m-s)c - (n+3s)d - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&de - (m+2s)d - (n+4s)e - ss + ms - ns - \chi = 0\\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

Und aus diesem selbst, damit ähnliche Formeln dieser Art hervorgehen, sind jene Substitutionen entsprungen.

§39 Wenn nun auf die gleiche Weise diese letzten Gleichungen mit Hilfe geeigneter Substitutionen in ihnen ähnliche verwandelt werden, werden anstelle von a,b,c,d etc die folgenden Substitutionen aufgefunden werden

$$\begin{aligned}
a &= m+n-s \;\; + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{a_1} \\
b &= m+n+s \;\; + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{b_1} \\
c &= m+n+3s + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{c_1} \\
d &= m+n+5s + \frac{4ss-2ms+2ns+\chi}{d_1} \\
& \qquad etc
\end{aligned}$$

wonach dann die folgenden Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned}
a_1b_1 - (m-2s)a_1 - (n+2s)b_1 - 4ss+2ms-2ns-\chi &= 0 \\
b_1c_1 - (m-s)b_1 - (n+3s)c_1 - 4ss+2ms-2ns-\chi &= 0 \\
c_1d_1 - mc_1 - (n+4s)d_1 - 4ss+2ms-2ns-\chi &= 0 \\
d_1e_1 - (m+s)d_1 - (n+5s)e_1 - 4ss+2ms-2ns-\chi &= 0 \\
etc &
\end{aligned}$$

§40 Indem also weiter fortgeschritten wird, wird festgelegt werden müssen

$$\begin{aligned}
a_1 &= m+n-s \;\; + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{a_2} \\
b_1 &= m+n+s \;\; + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{b_2} \\
c_1 &= m+n+3s + \frac{9ss-3ms+3ns+\chi}{c_2} \\
& \qquad etc
\end{aligned}$$

Und aus diesen Substitutionen werden diese Gleichungen hervorgehen

$$a_2b_2 - (m-3s)a_2 - (n+3s)b_2 - 9ss+3ms-3ns-\chi = 0$$

$$b_2c_2-(m-2s)b_2-(n+4s)c_2-9ss+3ms-3ns-\chi=0$$
$$c_2d_2-(m-s)c_2-(n+5s)d_2-9ss+3ms-3ns-\chi=0$$
$$\text{etc}$$

§41 Wenn nun diese Substitutionen ins Unendliche fortgesetzt werden und ununterbrochen die folgenden Werte in den vorhergehenden eingesetzt werden, werden die Werte der Buchstaben α,β,γ,δ etc mit den folgenden Kettenbrüchen ausgedrückt werden.

$$\alpha=m+n-s\ +\cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n-s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n-s+\text{etc}}}}}$$

$$\beta=m+n+s\ +\cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n+s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n+s+\text{etc}}}}}$$

$$\gamma=m+n+3s+\cfrac{ss-ms+ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{4ss-2ms+2ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{9ss-3ms+3ns+\chi}{m+n+3s+\cfrac{16ss-4ms+4ns+\chi}{m+n+3s+\text{etc}}}}}$$

etc

welche Kettenbrüche denen hinreichend ähnlich sind, welche Brouncker gegeben hat, obwohl die folgenden in den vorhergehenden nicht enthalten sind

§42 Damit aber der Gebrauch dieser Formeln bei einer Interpolation klar zutage tritt, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{p}{p+2q}+\frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+r)}+\frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(r+2q+4r)}+\text{etc}$$

deren Term des Index' $\frac{1}{2} = A$ sei, der Term des Index' $\frac{3}{2} = ABC$, der Term des Index' $\frac{5}{2} = ABCDE$ und so weiter. Nach Festlegen dieser wird sein

$$AB = \frac{p}{p+2q}, \quad CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}, \quad EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r} \quad \text{etc}$$

Es werde nun festgelegt

$$A = \frac{a}{p+2q-r}, \quad B = \frac{b}{p+2q}, \quad C = \frac{c}{p+2q+r}, \quad D = \frac{d}{p+2q+2r} \quad \text{etc}$$

und es wird sein

$$\begin{aligned} ab &= p(p+2q-r) \\ bc &= (p+r)(p+2q) \\ cd &= (p+2r)(p+2q+r) \\ de &= (p+3r)(p+2q+2r) \\ &etc \end{aligned}$$

Nun werde weiter

$$\begin{aligned} a &= p+q-r + \frac{g}{\alpha} \\ b &= p+q + \frac{g}{\beta} \\ c &= p+q+r + \frac{g}{\gamma} \\ d &= p+q+2r + \frac{g}{\delta} \\ &etc \end{aligned}$$

nach Einsetzen welcher Werte die folgenden Gleichungen hervorgehen werden, nachdem $g = q(r-q)$ gesetzt worden ist:

$$\begin{aligned} \alpha\beta - (p+q-r)\alpha - (p+q)\beta - q(r-q) &= 0 \\ \beta\gamma - (p+q)\beta - (p+q+r)\gamma - q(r-q) &= 0 \\ \gamma\delta - (p+q+r)\gamma - (p+q+2r)\delta - q(r-q) &= 0 \\ \delta\varepsilon - (p+q+2r)\delta - (p+q+3r)\varepsilon - q(r-q) &= 0 \\ etc \end{aligned}$$

§43 Nachdem diese Gleichungen mit denen verglichen wurden, welche wir in §38 angenommen haben, wird aufgefunden werden

$$m = p+q-r, \quad n = p+q, \quad \chi = qr-qq \text{ und } s = v$$

woher werden wird

$$\begin{aligned} ss-\ ms+ns+\chi &= 2rr+qr-qq \\ 4ss-2ms+2ns+\chi &= 6rr+qr-qq \\ 9ss-3ms+3ns+\chi &= 12rr+qr-qq \\ &\mathit{etc} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen all dieser Werte werden die folgenden Kettenbrüche erhalten werden, mit welchen die Buchstaben a,b,c,d etc ausgedrückt werden werden:

$$a = p+q-r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\text{ etc}}}}}$$

$$b = p+q \qquad +\cfrac{qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q)+\text{ etc}}}}}$$

$$c = p+q+r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\text{ etc}}}}}$$

etc

§44 Weil aber der Term der vorgelegten Reihe, der den Index n hat, ist

$$= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$$

wird sein

$$A = \frac{a}{p+2q-r} = \frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

oder

$$a = (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Darauf wird wegen $ab = p(p+2q-r)$ sein

$$b = \frac{p\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Weil ja aber durch den in der vorhergehenden Abhandlung erläuterten Lehrsatz ist

$$\frac{p\int y^{p-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = \frac{f\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = \frac{(f+r)\int y^{f+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

werde $f = p+2q-r$ festgelegt; danach wird sein

$$b = \frac{(p+2q)\int y^{p+2q+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Indem aber auf die gleiche Weise weiter fortgeschritten wird, wird sein

$$c = \frac{(p+2q+r)\int y^{p+2q+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+2r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

und

$$d = \frac{(p+2q+2r)\int y^{p+2q+3r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+3r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

$$etc$$

§45 Weil also das Bildungsgesetz der Progression dieser Integralformeln bekannt ist, wird gefragt werden, was der Wert dieses allgemeinen Kettenbruches

$$p+q+mr+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\text{etc}}}}$$

ist

$$= (p+2q+mr)\frac{\int y^{p+2q+(m+1)r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{p+(m+1)r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn daher $p+q+mr = s$ gesetzt wird, so dass $p = s-q-mr$ ist, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$s + \cfrac{qr-qq}{2s + \cfrac{2rr+qr-qq}{2s + \cfrac{6rr+qr-qq}{2s + \cfrac{12rr+qr-qq}{2s + \cfrac{20rr+qr-qq}{2s+\text{etc}}}}}}$$

dessen Wert deshalb dieser Ausdruck sein wird

$$(q+s)\frac{\int y^{q+r+s-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

§46 Weil auf die gleiche Weise der Wert dieses Kettenbruches

$$s+r+\cfrac{qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(s+r)+\text{etc}}}}$$

ist

$$= (q+r+s)\frac{\int y^{s+2r+q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{s+2r-q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

wird das Produkt dieser zwei Kettenbrüche deshalb sein

$$= (s+q)(s+r-q)$$

wie das Produkt der Integralformeln aufzeigt. Es ist nämlich durch den in der vorhergehenden Abhandlung gegebenen Lehrsatz

$$\frac{f}{a} = \frac{\int x^{a-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}} \cdot \int x^{a+r-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}}}{\int x^{f-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}} \cdot \int x^{f+r-1}dx : \sqrt{1-x^{2r}}}$$

auf welche Form das Produkt der Integralformeln von selbst zurückgeführt wird.

§47 Der gefundene Kettenbruch kann in eine andere gefällige Form verwandelt werden, dass die einzelnen Zähler in Faktoren aufgelöst werden können; so wird man diesen Kettenbruch haben

$$s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc}}}}}$$

dessen Wert daher sein wird

$$=(q+s)\frac{\int y^{r+s+q-1}dx:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dx:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn deshalb zum Kettenbruch s addiert wird, dass überall dasselbe Bildungsgesetz der Progression gilt, wird sein

$$\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}+s\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

$$=2s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc}}}}}$$

§48 Wenn nun $r=2$ und $q=1$ gesetzt wird, werden zusammengenommen alle von Brouncker dargebotenen Kettenbrüche hervorgehen, die alle in diesem Kettenbruch enthalten sein werden

$$s+\cfrac{1}{2s+\cfrac{9}{2s+\cfrac{25}{2s+\cfrac{49}{2s+\cfrac{81}{2s+\text{etc}}}}}}$$

dessen Wert deshalb sein wird

$$= (s+1)\frac{\int y^{s+2}dy : \sqrt{1-y^4}}{\int y^s dy : \sqrt{1-y^4}}$$

welcher Ausdruck in höchstem Grade mit dem übereinstimmt, welchen wir oben, bevor die Gültigkeit vollkommen feststand, angegeben haben; siehe §16.

§49 Weil ich also bisher sehr viele Kettenbrüche gegeben habe, deren Werte durch Integralformeln angegeben werden können, werde ich nun eine direkte Methode darlegen, mit deren Hilfe aus Integralformeln sich umgekehrt zu Kettenbrüchen gelangen lässt. Aber diese Methode ist auf die Reduktion einer Integralformel auf zwei andere gestützt, welche Reduktion jener gewohnten nicht sehr unähnlich ist, mit welcher die Integration einer gewissen Differentialformel auf die Integration einer anderen zurückgeführt wird. Es gebe also unendlich viele Integralformeln dieser Art

$$\int Pdx, \quad \int PRdx, \quad \int PR^2dx, \quad \int PR^3dx, \quad \int PR^4dx \quad \text{etc}$$

die so beschaffen seien, dass, wenn die einzelnen so integriert werden, dass sie für $x=0$ gesetzt verschwinden, und dann $x=1$ gesetzt wird, es dann ist, wie folgt

$$\begin{aligned}
a\int Pdx &= b\int PRdx &&+ c\int PR^2dx \\
(a+\alpha)\int PRdx &= (b+\beta)\int PR^2dx &&+ (c+\gamma)\int PR^3dx \\
(a+2\alpha)\int PR^2dx &= (b+2\beta)\int PR^3dx &&+ (c+2\gamma)\int PR^4dx \\
(a+3\alpha)\int PR^3dx &= (b+3\beta)\int PR^4dx &&+ (c+3\gamma)\int PR^5dx
\end{aligned}$$

und allgemein

$$(a+n\alpha)\int PR^ndx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

§50 Wenn man also Integralformeln dieser Art hat, werden als leichte Aufgabe aus ihnen Kettenbrüche gebildet werden. Weil nämlich gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\int Pdx}{\int PRdx} &= \frac{b}{a} + \frac{c\int PR^2dx}{a\int PRdx}\\
\frac{\int PRdx}{\int PR^2dx} &= \frac{b+\beta}{a+\alpha} + \frac{(c+\gamma)\int PR^3dx}{(a+\alpha)\int PR^2dx}\\
\frac{\int PR^2dx}{\int PR^3dx} &= \frac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \frac{(c+2\gamma)\int PR^4dx}{(a+2\alpha)\int PR^3dx}\\
\frac{\int PR^3dx}{\int PR^4dx} &= \frac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \frac{(c+3\gamma)\int PR^5dx}{(a+3\alpha)\int PR^4dx}\\
&etc
\end{aligned}$$

wird, indem jeder Wert in der vorhergehenden Gleichung eingesetzt wird, sein

$$\frac{\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{b}{a} + \cfrac{c:a}{\cfrac{b+\beta}{a+\alpha} + \cfrac{(c+\gamma):(a+\alpha)}{\cfrac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+2\gamma):(a+2\alpha)}{\cfrac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \cfrac{(c+3\gamma):(a+3\alpha)}{\cfrac{b+4\beta}{a+4\alpha} + \text{etc}}}}}$$

Aber dieser Ausdruck geht invertiert und von den Partialbrüchen befreit in diesen über

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta + \cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta + \cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta + \cfrac{(a+4\alpha)(c+3\gamma)}{b+4\beta+\text{etc}}}}}}$$

§51 Wenn auch war, während n eine negative Zahl bezeichnet,

$$(a+n\alpha)\int PR^ndx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

wird man die folgende Gleichungen haben:

$$\begin{aligned}
(a-\alpha)\int\frac{Pdx}{R} &= (b-\beta)\int Pdx + (c-\gamma)\int PRdx\\
(a-2\alpha)\int\frac{Pdx}{R^2} &= (b-2\beta)\int\frac{Pdx}{R} + (c-2\gamma)\int Pdx\\
(a-3\alpha)\int\frac{Pdx}{R^3} &= (b-3\beta)\int\frac{Pdx}{R^2} + (c-3\gamma)\int\frac{Pdx}{R}\\
(a-4\alpha)\int\frac{Pdx}{R^4} &= (b-4\beta)\int\frac{Pdx}{R^3} + (c-4\gamma)\int\frac{Pdx}{R^2}\\
&\quad etc
\end{aligned}$$

Daher wird also auf die gleiche Weise aufgestellt werden

$$\begin{aligned}
\frac{\int PRdx}{\int Pdx} &= \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \frac{(a-\alpha)\int Pdx : R}{(c-\gamma)\int Pdx}\\
\frac{\int Pdx}{\int Pdx : R} &= \frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \frac{(a-2\alpha)\int Pdx : R^2}{(c-2\gamma)\int Pdx : R}\\
\frac{\int Pdx : R}{\int Pdx : R^2} &= \frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \frac{(a-3\alpha)\int Pdx : R^3}{(c-3\gamma)\int Pdx : R^2}\\
&\quad etc
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird aber hervorgebracht werden

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \cfrac{(a-\alpha):(c-\gamma)}{\cfrac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \cfrac{(a-2\alpha):(c-2\gamma)}{\cfrac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \cfrac{(a-3\alpha):(c-3\gamma)}{\cfrac{-(b-4\beta)}{c-4\gamma} + \text{etc}}}}$$

oder nach Beseitigen der Partialbrüche

$$\frac{(c-\gamma)\int PRdx}{\int Pdx} = -(b-\beta) + \cfrac{(a-\alpha)(c-2\gamma)}{-(b-2\beta) + \cfrac{(a-2\alpha)(c-3\gamma)}{-(b-3\beta) + \cfrac{(a-3\alpha)(c-4\gamma)}{-(b-4\beta) + \text{etc}}}}$$

Man hat also zwei Kettenbrüche, von denen jeder der beiden denselben Wert $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ hat.

§52 Es ist aber das Wichtigste bei dieser Aufgabe, dass geeignete anstelle von P und R einzusetzende Funktionen von x bestimmt werden, damit wird

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

zumindest in dem Fall, in welchem nach den einzelnen Integrationen $x=1$ gesetzt wird. Wir wollen also festlegen, dass allgemein ist

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx + R^{n+1}S = (b+n\beta)\int PR^{n+1}dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$$

und $R^{n+1}S$ eine Funktion von x solcher Art ist, die so für $x=0$ und $x=1$ gesetzt verschwinde. Nach Nehmen von Differentialen und Division durch R^n wird also sein

$$(a+n\alpha)Pdx + RdS + (n+1)SdR = (b+n\beta)PRdx + (c+n\gamma)PR^2dx$$

diese Gleichung, weil sie immer Geltung haben muss, was auch immer n ist, wird in diese zwei Gleichungen aufgelöst

$$aPdx + RdS + SdR = bPRdx + cPR^2dx$$

und

$$\alpha Pdx + SdR = \beta PRdx + \gamma PR^2dx$$

Aus diesen Gleichungen wird auf zweifache Weise gefunden

$$Pdx = \frac{Rds + SdR}{bR + cR^2 - a} = \frac{SdR}{\beta R + \gamma R^2 - \alpha}$$

woher wird

$$\frac{dS}{S} = \frac{(b-\beta)RdR + (c-\gamma)R^2dR - (a-\alpha)dR}{\beta R^2 + \gamma R^3 - \alpha R}$$

$$= \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + (\alpha c - \gamma a)RdR}{\alpha(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)}$$

Aus dieser Gleichung wird also S durch R bestimmt; nachdem aber S gefunden worden ist, wird sein

$$P = \frac{SdR}{(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)dx}$$

und daher werden die Formeln $\int Pdx$ und $\int PRdx$ sein, mit welchen der Wert der oberen Kettenbrüche bestimmt wird.

§53 Weil ja also die Größe R durch x nicht bestimmt wird, wird für sie irgendeine Funktion von x angenommen werden können. Aber weil die Bedingung der Frage erfordert, dass $R^{n+1}S$ so für $x = 0$ wie für $x = 1$ gesetzt verschwindet, wird dadurch die Natur der anstelle von R annehmenden Funktion bestimmt. Darauf ist aber auch darauf zu achten, dass die Integrale $\int PR^n dx$, nachdem nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, einen endlichen Wert erhalten; wenn nämlich diese Integrale in diesem Fall entweder 0 oder ∞ werden würden, dann würde der Wert $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ schwer berechnet werden. Dieser erster Übelstand wird am sichersten vermieden, indem R ein Wert solcher Art zugeteilt wird, dass PR^n nie einen negativen Wert annimmt, solange sich x innerhalb der Grenzen 0 und 1 befindet. Damit aber $\int PR^n dx$ für $x = 1$ gesetzt nicht unendlich wird, wird oftmals schwerer erhalten. Es wird aber gefällig sein, die Fälle, in denen n eine entweder positive oder negative Zahl ist, voneinander zu trennen, weil sehr oft, wenn diesen Bedingungen Genüge geleistet wird, während n eine positive Zahl ist, nicht zugleich den übrigen Fällen Genüge geleistet werden kann. Wenn aber die vorgeschriebenen Bedingungen nur in den Fällen erfüllt werden, in denen n eine positive Zahl ist, dann kann nur der Wert des ersten Kettenbruches dargeboten werden, des zweiten hingegen nur, wenn der Bedingung Geüge geleistet war, während n eine negative Zahl ist.

§54 Wir wollen die Entwicklung dieser Methode, die Werte von Kettenbrüchen zu finden, von den schon zuvor behandelten Beispielen aus beginnen, und zuerst sei freilich dieser Kettenbruch vorgelegt

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc}}}}$$

dessen oben in §34 angegebener Wert dieser Art ist

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Es werde also dieser Kettenbruch mit diesem allgemeinen verglichen

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\text{etc}}}}$$

und es wird sein

$$b = r, \quad \beta = 0, \quad \alpha = r, \quad \gamma = r, \quad a = f - r, \quad c = h$$

Nach Einsetzen dieser Werte wird entspringen

$$\frac{dS}{S} = \frac{rRdR + (h-r)R^2dR - (f-2r)dR}{rR^3 - rR} = \frac{(f-2r)dR}{rR} + \frac{rdR + (h-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$$

und indem integriert wird

$$\ln(S) = \frac{f-2r}{r}\ln(R) + \frac{h-f}{2r}\ln(R+1) + \frac{h-f+2r}{2r}\ln(R-1) + \ln(C)$$

oder

$$S = CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}(R-1)$$

Daher wird deshalb sein

$$R^{n+1}S = CR^{\frac{f+(n+1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}(R-1)$$

und

$$Pdx = \frac{CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f}{2r}}dR}{r(R+1)}$$

§55 Weil aber $R^{n+1}S$ in zwei Fällen verschwinden muss, für $x = 0$ wie für $x = 1$ gesetzt, und das, welche positive Zahl auch immer anstelle von n gesetzt wird (es ist nämlich nicht von Nöten, auf negative Werte von n zu achten), wollen wir festlegen, dass in der Tat f,h und r positive Zahlen sind und $h > f$ ist, was sich gewiss annehmen lässt, wenn nicht $f = h$ ist; des Weiteren sei auch $f > r$. Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, ist es offenbar, dass die Formel $R^{n+1}S$ in zwei Fällen verschwindet, natürlich wenn $R = 0$ und

$R = 1$ ist; und dies hat auch Geltung, wenn $f = h$ ist. Solange also $f > r$ ist, wird $R = x$ gesetzt werden können und es wird sein

$$Pdx = \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}$$

nachdem die Konstante C bestimmt worden ist. Aus diesen wird deshalb der Wert des vorgelegten Kettenbruches sein

$$= (f-r)\frac{\int \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}}{\int \frac{x^{\frac{f-r}{r}}(1-x^2)^{\frac{h-f}{2r}}dx}{1+x}}$$

Nachdem aber $x = y^r$ gesetzt worden ist, wird der gesuchte Wert sein

$$= \frac{(f-r)\int y^{f-r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}{\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}$$

§56 Wir haben also einen anderen den Wert dieses Kettenbruches

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \text{etc}}}$$

enthaltenden Ausdruck gefunden, der, auch wenn er Integralformeln in sich umfasst, dennoch vom zuvor gefundenen Ausdruck abweicht. Denn dieser letzte Ausdruck hat keine Geltung, wenn nicht $f > h$ ist; für h muss aber der größere der zwei Größen f und h angenommen werden, wenn sie freilich ungleich waren. Wenn aber dennoch auch f kleiner als r war, kann der Wert des Kettenbruches dargeboten werden, indem dieser betrachtet wird

$$r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc}}}$$

dessen Wert sein wird

$$= \frac{f\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}{\int y^{f+r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy : (1+y^r)}$$

welche keiner Einschränkung bedarf. Nachdem nämlich dieser Wert $= V$ gesetzt worden ist, wird der Wert des vorgelegten Kettenbruches $= r + \frac{fh}{V}$ sein.

§57 Jener Fall, in dem $f = h$ ist, der zuvor auf eingentümliche Weise gefunden worden war und sein in §34 entdeckter Wert war

$$\frac{1 - (h-r)\int x^{n-1}dx : (1+x^r)}{\int x^{n-1}dx : (1+x^r)} = \frac{(h-r)\int x^{h-r-1}dx : (1+x^r)}{\int x^{n-1}dx : (1+x^r)}$$

fließt aus diesem letzten Ausdruck von selbst heraus; für $f = h$ gesetzt wird nämlich der in §35 gefundene Ausdruck in diesen übergehen

$$\frac{(h-r)\int y^{h-r-1}dy : (1+y^r)}{\int y^{h-1}dy : (1+y^r)}$$

ganz und gar denselben, woher die Übereinstimmung der beiden allgemeinen Ausdrücke zur Genüge erkannt wird. Hier lässt sich aber sicher annehmen, dass $h > r$ ist, weil die Fälle, in denen dies nicht passiert, sehr leicht auf diese zurückgeführt werden, wie gerade gezeigt worden ist.

§58 Damit aber die Übereinstimmung der beiden Ausdrücke in jedem Fall eingesehen wird, haben wir dieses Lemma voraus zu schicken, was von anderen schon bewiesen worden ist. Wenn diese Reihe vorgelegt war

$$1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \frac{p(p+s)(p+2s)}{(q+s)(q+2s)(q+3s)} + \text{etc}$$

in welcher Größen p,q und s positiv seien und $q > p$ sei, wird die Summe dieser Reihe ins Unendliche fortgesetzt $= \dfrac{q}{q-p}$ sein. Die Gültigkeit dieses Lemmas kann aber durch meine allgemeine Methode Reihen zu summieren auf die folgende Weise aufgezeigt werden. Es werde nämlich diese Reihe betrachtet

$$x^q + \frac{p}{q+s}x^{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)}x^{q+2s} + \text{etc}$$

deren Summe z genannt werde, und es wird durch Differentiationen sein

$$\frac{dz}{dx} = qx^{q-1} + px^{q+s-1} + \frac{p(p+s)}{q+s}x^{q+2s-1} + \text{etc}$$

und

$$x^{p-q-s}dz = qx^{p-s-1}dx + px^{p-1}dx + \frac{p(p+s)}{q+s}x^{p+s-1}dx + \text{etc}$$

welche Gleichung integriert gibt

$$\int x^{p-q-s}dz = \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^p + \frac{px^{p+s}}{q+s} + \text{etc} = \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^{p-q}z$$

Aus dieser Gleichung wird differenziert diese hervorgehen

$$x^{p-q-z}dz = qx^{p-s-1}dx + x^{p-q}dz + (p-q)x^{p-q-1}zdx$$

oder

$$dz(1-x^s) + (q-p)x^{s-1}zdx = qx^{q-1}dx$$

oder auch

$$dz + \frac{(q-p)x^{s-1}zdx}{1-x^s} = \frac{qx^{q-1}dx}{1-x^s}$$

deren Integral ist

$$\frac{z}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} = q\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p+s}{s}}} = \frac{qx^q}{(q-p)(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} - \frac{qp}{q-p}\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$$

woher sein wird

$$z = \frac{qx^q}{q-p} - \frac{pq(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}{q-p}\int \frac{x^{q-1}dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$$

Daher wird für $x = 1$ gesetzt sein

$$z = \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \text{etc}$$

welches der Beweis des gegebenen Lemmas ist, aus welchem zugleich eingesehen wird, dass die Gültigkeit des Lemmas nicht bestehen bleibt, wenn $q > p$ ist.

§59 Weil nur also den Wert dieses Kettenbruches

$$r+\cfrac{fh}{r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r+\text{etc}}}}$$

auf zwei Weisen ausgedrückt haben, deren einer ist

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}-f(h-r)\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}-h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{1-y^{2r}}}$$

der andere hingegen, der in §56 gefunden worden ist

$$=r+\frac{h\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)}$$

wird es der Mühe wert sein, die Übereinstimmung dieser Ausdrücke zu zeigen. Weil also ist

$$\frac{1}{1+y^r}=\frac{1-y^r}{1-y^{2r}}$$

wird sein

$$\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)=\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}-\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$$

und

$$\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)$$

$$=\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}-\int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$$

$$=\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}-\frac{f}{h}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$$

Es werde festgelegt

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}=V$$

es wird der Wert des letzten Kettenbruches sein

$$=r+\frac{hV-f}{1-V}$$

Es werde außerdem festgelegt

$$\frac{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} = W$$

es wird der echte Wert sein

$$= \frac{h(f-r)W - f(h-r)}{f-hW}$$

aus deren Gleichheit folgt, dass sein wird

$$V = \frac{f}{hW}$$

so dass ist

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = \frac{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{g\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

die Begründung welcher Gleichheit durch die in der vorhergehenden Abhandlung dargebotenen Lehrsätze bekannt ist; es ist nämlich durch eines aus jenen Theoremen

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = \frac{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

§60 Wir wollen nun diesen Kettenbruch betrachten

$$2r + \cfrac{fh}{2r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{2r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{2r + \text{etc}}}}$$

dessen Wert oben in §35 gefunden worden ist

$$= \frac{2(f-r)(h-r)\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - h(f+h-3r)\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{2h\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}} - (f+h-r)\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

Wenn nun dieser Kettenbruch mit diesem verglichen wird

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta}}}$$

wird sein

$$b = 2r, \quad \beta = 0, \quad \alpha = r, \quad \gamma = r, \quad a = f - r, \quad \text{und} \quad c = h$$

Daher wird man also aus §52 haben

$$\frac{dS}{S} = \frac{(f-2r)dR}{rR} + \frac{2rdR + (h-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$$

und durch Integrieren

$$S = CR^{\frac{f-2r}{2r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$$

woher wird

$$Pdx = \frac{C}{r}R^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(R-1)^2 dR$$

und

$$R^{n+1}S = CR^{\frac{f+(n+1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{h-f-r}{2r}}(R-1)^2$$

welcher Ausdruck in zwei Fällen verschwindet, in dem einmal $R = 0$ und einmal $R = 1$ gesetzt wird, es sei nur $f > r$ und $h - 3r > f$, welchen Bedingungen immer Genüge geleistet werden kann.

§61 Es sei also $R = x$ und nach Bestimmen der Konstante C wird sein

$$Pdx = x^{\frac{f-2r}{r}}dx(1-x^2)^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-x)^2$$

oder für $R = x = y^r$ gesetzt wird sein

$$Pdx = y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2$$

aus welchem der Wert des vorgelegten Kettenbruches sein wird

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx} = \frac{(f-r)\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}$$

welche durch die Lehrsätze der oberen Abhandlung auf die erste Form zurückgeführt werden wird, indem das Quadrat $(1-y^r)^2$ entwickelt wird, wonach jede der beiden Integralformeln in zwei einfachere aufgelöst werden wird. Diese Reduktion selbst werde ich aber am folgenden sich weiter erstreckenden Beispiel aufzeigen.

§62 Wenn man diese Integralformel hat

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}(1-y^r)^n$$

und $(1-y^r)^n$ in eine Reihe aufgelöst wird

$$1-ny^r+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{2r}-\text{etc}$$

wird, indem jeweils alle zweiten Terme von dieser genommen werden, die vorgelegte Integralformel auf die zwei folgenden zurückgefrührt werden

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}\left(1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m}{p}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{m(m+2r)}{p(p+2r)}+\text{etc}\right)$$
$$-\int y^{m-r-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}\left\{\begin{array}{c} n+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{m+r}{p+r} \\ +\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\dfrac{(m+r)(m+3r)}{(p+r)(p+3r)}+\text{etc}\end{array}\right\}$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt worden ist

$$m+2\chi r+2r=p$$

Wenn daher wie im vorhergehende Fall $n=2$ war, wird sein

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}(1-y^r)^2=\frac{m+p}{p}\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}-2\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\chi}$$

Daher wird man haben

$$\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}=\frac{\dfrac{(f-r)(f+h-3r)}{h-2r}\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}-2(f-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}}{\dfrac{f+h+r}{h-r}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}-2\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-3r}{2r}}}$$
$$=\frac{h(f+h-3r)\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}-2(f-r)(h-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}{(f+h-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}-2h\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}$$

welcher Ausdruck, weil er jenem gleich sein muss, der oben in §35 gefunden worden ist, diese Gleichung liefern wird

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-r}{2r}}} = \frac{\int y^{h+r-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{f-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}$$

deren Begründung freilich schon in den Lehrsätzen der oberen Abhandlung enthalten ist.

§63 Wir wollen nun umgekehrt für P und R die gegebenen Werte nehmen und aus ihnen Kettenbrüche bilden und wollen festlegen

$$P = x^{m-1}(1-x^r)^n(p+qx^r)^\chi \quad \text{und} \quad R = x^r$$

Weil aber sein muss

$$(a+\nu\alpha)\int PR^\nu dx = (b+\nu\beta)\int PR^{\nu+1}dx + (c+\nu\gamma)\int PR^{\nu+2}dx$$

und daher wegen der gegebenen P und R aus §52 wird

$$S = \frac{1}{r}x^{m-r}(1-x^r)^n(p+qx^r)^\chi(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)$$

wird sein

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \frac{(m-r)dx}{x} + \frac{nrx^{r-1}dx}{-1+x^r} + \frac{\chi qrx^{r-1}dx}{p+qx^r} + \frac{2\gamma rx^{2r-1}dx + \beta rx^{r-1}dx}{\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha} \\ &= \frac{(a-\alpha)rdx}{\alpha x} + \frac{(\alpha b-\beta a)rx^{r-1}dx + (\alpha c-\gamma a)rx^{2r-1}dx}{\alpha(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)}\end{aligned}$$

Es sei nun

$$(p+qx^r)(x^r-1) = \gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha$$

es wird sein

$$\gamma = q, \quad \beta = p-q \quad \text{und} \quad \alpha = p$$

Es sei außerdem

$$\frac{(a-\alpha)r}{\alpha} = m-r$$

es wird sein

$$a = \frac{mp}{r}$$

Daher wird weiter sein müssen

$$nqr + \chi qr + 2qr = \frac{cpr - mpq}{p}$$

oder

$$c = \frac{mq}{r} + nq + (\chi + 2)q$$

und schließlich

$$b = \frac{m(p-q)}{r} + (n+1)p - (\chi+1)q$$

Solange also m und $m+1$ positive Zahlen waren, damit $R^{\nu+1}S$ so für $x = 0$ wie für $x = 1$ gesetzt verschwindet, wird der folgende Ausdruck hervorgehen

$$\frac{\int x^{m+r-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^\chi}{\int x^{m-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^\chi} = \frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

der deshalb diesem Kettenbruch gleich sein wird

$$\cfrac{mp}{m(p-q)+(n+1)pr-(\chi+1)qr+\cfrac{pq(m+r)(m+nr+(\chi+2))r}{m(p-q)+(n+2)pr-(\chi+2)qr+\cfrac{pq(m+2r)(m+(n+1)r+(\chi+2))r}{m(p-q)+(n+3)pr-(\chi+3)qr+\text{etc}}}}$$

§64 Damit dieser Kettenbruch eine einfachere Form annimmt, werde festgelegt

$$m + nr + r = a, \quad m + \chi r + r = b \quad \text{und} \quad m + nr + \chi r + r$$

es wird werden

$$\chi = \frac{c-a}{r}, \quad n = \frac{c-b}{r} \quad \text{und} \quad m = a + b - c - r$$

und dabei wird sein

$$\cfrac{p(a+b-c-r)}{ap-bq+\cfrac{pq(a+b-c)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(a+b-c+r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\cfrac{pq(a+b-c+2r)(c+3r)}{(a+3r)p-(b+3r)q+\text{etc}}}}}$$

$$= \frac{\int x^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

nachdem nach jeder der beiden Integrationen $x = 1$ gesetzt worden ist. Es wird aber verlangt, dass

$$a+b-c-r \quad \text{und} \quad c-b+r$$

positive Zahlen sind. Wenn aber der Kürze wegen festgelegt wird

$$a+b-c-r = g$$

wird sein

$$\frac{\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-q}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}$$

$$= \cfrac{pg}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc}}}}$$

welche Gleichung sich sehr weit erstreckt und bisher gefundenen Kettenbrüche in sich umfasst.

§65 Wenn die Größen c und g miteinander vertauscht werden, wird der folgende Kettenbruch hervorgehen

$$\cfrac{pc}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc}}}}$$

dessen Wert daher sein wird

$$= \frac{\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}$$

Daher weil diese Kettenbrüche ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, natürlich g zu c, wird daher der folgende Lehrsatz einspringen, nachdem anstelle von g wieder sein Wert eingesetzt worden ist

$$\frac{c\int^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$= \frac{(a+b-c-r)\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}$$

In dieser seht weiten Form sind sehr viele außerordentliche besondere Reduktionen enthalten. Es sei eines Beispiels wegen $b = c + r$; es wird sein

$$\frac{c\int x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)}{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)} = \frac{a\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}} = c$$

Man wird also daher diesen sich sehr weit erstreckenden Lehrsatz haben

$$\int \frac{x^{m-1}dx(p+qx^r)^\chi}{1-x^r} = \int \frac{x^{n-1}dx(p+qx^r)^\chi}{1-x^r}$$

sobald immer, nachdem die Integrationen so ausgeführt worden sind, dass die Integrale für $x = 0$ gesetzt verschwinden, verstanden wird, dass $x = 1$ sein wird. Es ist aber allein jener Fall ausgenommen, in dem $q + p = 0$ ist, in welchem eine Unannehmlichkeit auftritt.

§66 Die Kettenbrüche, welche wir bisher mit Hilfe von Interpolationen gefunden haben, gehen darauf zurück, dass die Partialnenner konstant sind. Damit wir also die nun gefundene allgemeine Form auf sie übertragen, werde $p = q = 1$ gesetzt und es wird dieser Kettenbruch hervorgehen

$$\cfrac{cg}{a-b+\cfrac{(c+r)(g+r)}{a-b+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{a-b+\cfrac{(c-3r)(g-3r)}{a-b+\text{etc}}}}} = \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

oder der Wert desselben wird auch sein

$$= \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}$$

während $g = a + b - c - r$ ist. Es werde festgelegt

$$a - b = s$$

wegen

$$a + b = c + g + r$$

wird sein

$$a = \frac{c+g+r+s}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{c+g+r-s}{2}$$

woher werden wird

$$\cfrac{cg}{s + \cfrac{(c+r)(g+r)}{s + \cfrac{(c+2r)(g+2r)}{s + \text{etc}}}}$$

$$\frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}} = \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}$$

§67 Wir wollen damit zur Form in §47 gelangt wird, $2s$ anstelle von s setzen und es sei $c = q$ und $g = r - q$; man wird diesen Kettenbruch haben

$$\cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(q+r)(2r-q)}{2s + \cfrac{(q+2r)(3r-q)}{2s + \text{etc}}}}$$

dessen Wert daher entweder sein wird

$$= \frac{q\int x^{2r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$$

oder aber

$$= \frac{(r-q)\int x^{q+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$$

Der Wert desselben Kettenbruches ist aber zuvor gefunden worden

$$= \frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}}{\int y^{r+s-q-1}dy : \sqrt{1-y^{2r}}} - s$$

Deswegen werden diese Integralformeln einander gleich sein; dies ist ein keineswegs zu verachtender Lehrsatz.

§68 Es sei, wie wir in §48 festgelegt haben, $r = 2$ und $q = 1$; es wird sein

$$\frac{(1+s)\int y^{s+2}dy : \sqrt{1-y^4}}{\int y^s dy : \sqrt{1-y^4}} - s = \frac{\int x^2 dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^s}{\int dx (1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}} (1-x^2)^s}$$

welche Gleichheit hervorstechend ist, wenn $s = 0$ ist; in den Fällen, in denen s eine ganze ungerade Zahl ist, wird die Gleichheit nicht schwer gezeigt. Wie wenn $s = 1$ war, wird die letzte Formel sein

$$\frac{\int xxdx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{x - \int dx : (1+xx)}{\int dx : (1+xx)} = \frac{4-\pi}{\pi}$$

nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist. Die erste Formel wird hingegen geben

$$\frac{2\int y^3 dy : \sqrt{1-y^4}}{\int ydy : \sqrt{1-y^4}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi}$$

genauso wie die vorhergehende. Aber wenn s eine gerade Zahl ist, wird durch die Entwicklung der Potenz $(1-xx)^s$ die Übereinstimmung der beiden Ausdrücke leicht erkannt werden.

§69 Außer den bisher gefundenen Kettenbrüchen umfasst aber die gefundene allgemeine Form andere in sich, aus denen es einige zu entwickeln, nützlich sein wird. Es sei also $g = c$ und der Wert dieses Kettenbruches

$$\cfrac{c^2}{s + \cfrac{(c+r)^2}{s + \cfrac{(c+2r)^2}{s + \text{etc}}}}$$

wird sein

$$\frac{c\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{s}{r}} : (1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}$$

Es werde $c = 1$ und $r = 1$ gesetzt und es wird sein

$$\cfrac{1}{s + \cfrac{4}{s + \cfrac{9}{s + \cfrac{16}{s + \text{etc}}}}} = \frac{\int xdx (1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}{\int dx (1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}$$

die Werte welches Ausdruckes, welcher für verschiedene Bedingungen von s annimmt, wir untersuchen wollen. Nachdem also der Wert dieses Ausdrucks $= V$ gesetzt worden ist, wird es sein wie folgt:
wenn $s = 0$ ist

$$V = \frac{\int xdx : \sqrt{1-xx}}{\int dx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int dy : (1+yy)}$$

wenn $s = 2$ ist

$$V = \frac{2\int dx : \sqrt{1-xx} - 3\int xdx : \sqrt{1-xx}}{2\int xdx : \sqrt{1-xx} - \int dx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int y^2dx : (1+yy)} - 2$$

wenn $s = 4$ ist

$$V = \frac{19\int xdx : \sqrt{1-xx} - 12\int dx : \sqrt{1-xx}}{3\int dx : \sqrt{1-xx} - 4\int xdx : \sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2\int y^4dy : (1+yy)} - 4$$

Allgemein wird aber sein

$$V = \frac{1}{2\int y^s dy : (1+yy)} - s$$

aus welcher Form klar wird, wenn s eine ganze gerade Zahl war, dass die Quadratur des Kreises involviert wird, andernfalls aber, wenn s eine ungerade Zahl ist, Logarithmen.

§70 Es sei uns nun dieser Kettenbruch vorgelegt

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{16}{5 + \cfrac{25}{6 + \text{etc}}}}}}$$

Es werde dieser nun mit der in §64 dargebotenen Form verglichen und es wird werden

$$\begin{aligned} pqcg &= 1 \\ pq(c+r)(g+r) &= 4 \\ pq(c+2r)(g+2r) &= 9 \\ qp - bq = 2 \quad &\text{und} \quad (p-q)r = 1 \end{aligned}$$

woher sein wird

$$c = g = r$$

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2r}, \quad q = \frac{\sqrt{5}-1}{2r}$$

$$a = \frac{r(1+3\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad b = \frac{r(3\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$$

nach Einsetzen welcher man den Wert des vorgelegten Kettenbruches haben wird

$$= 1 + \frac{(\sqrt{5}-1)\int x^{2r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{2\int x^{r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}$$

Aus diesem Ausdruck kann wegen der Wurzelexponenten nichts Bemerkenswertes gefolgert werden.

§71 Weil also in diesen Kettenbrüchen die Partialzähler aus zwei Faktoren zusammengesetzt sind, so schreite ich nun zu Kettenbrüchen solcher Art voran, in denen diese Partialzähler eine arithmetische Progression festlegen. Es werde also, indem §50 zurückgekehrt wird, $\gamma = 0$ und $c = 1$; es wird sein

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a+\alpha}{b+\beta+\cfrac{a+2\alpha}{b+2\beta+\cfrac{a+3\alpha}{b+3\beta+\text{etc}}}}}$$

Es muss aber genommen werden

$$\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b-\beta a)dR+\alpha RdR}{\alpha(\beta R-\alpha)} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{dR}{\beta} + \frac{(\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a)dR}{\alpha\beta(\beta R-\alpha)}$$

woher wird

$$S = Ce^{\frac{R}{\beta}}R^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}(\beta R-\alpha)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

Es werde festgelegt

$$R = \frac{\alpha x}{\beta}$$

es wird sein

$$S = Ce^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (1-x)^{\frac{\alpha^2 \alpha\beta b - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

und $R^{n+1}S$ verschwindet in zwei Fällen, natürlich so für $x = 0$ und $x = 1$ gesetzt, es sei nur

$$\alpha^2 + \alpha\beta b > \beta^2 a$$

Daher wird also sein

$$Pdx = e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$$

und der Wert des vorgelegten Kettenbruches

$$= \frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{\alpha \int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}{\beta \int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}$$

nachdem nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist

§72 Damit dieser Fall an einem Beispiel illustriert, sei

$$a = 1, \quad \alpha = 1 \quad \text{und} \quad \beta = 1$$

man wird diesen Kettenbruch haben

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc}}}}}$$

dessen Wert sein wird

$$\frac{\int e^x x dx}{\int e^x dx} = \frac{e^x x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e-1}$$

nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist. Daher wird sein

$$e = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{6+\text{etc}}}}}$$

mit welchem Ausdruck hinreichend schnell zum Wert der Zahl e, deren Logarithmus $= 1$ ist, gelangt wird.

§73 Wir wollen nun festlegen, dass in dem oberen in §71 gegebenen Kettenbruch $\beta = 0$ ist, dass gilt

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a+\alpha}{b + \cfrac{a+2\alpha}{b + \cfrac{a+3\alpha}{b + \text{etc}}}}}$$

wird sein

$$\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} - \frac{bdR}{\alpha} - \frac{RdR}{\alpha}$$

und daher

$$S = CR^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{-2bR-RR}{2\alpha}}$$

Nun verschwindet $R^{n+1}S$ in zwei Fällen, deren einer der ist, wenn $R = 0$ ist, der andere, wenn $R = \infty$ ist, es seien nur a und α positive Zahlen. Es werde also festgelegt

$$R = \frac{x}{1-x}$$

und wird sein

$$S = Cx^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} : (1-x)^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}$$

Wegen

$$dR = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

wird sein

$$\int Pdx = \int \frac{x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx}{(1-x)^{\frac{a+2\alpha}{\alpha}} e^{\frac{abx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}$$

§74 Es sei schließlich in §50

$$a = 1, \quad c = 1, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

es wird sein

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b+\beta + \cfrac{1}{b+2\beta + \cfrac{1}{b+3\beta+\text{etc}}}}}$$

und

$$\frac{dS}{S} = \frac{R^2dR - (b-\beta)RdR - dR}{\beta R^2}$$

woher werden wird

$$S = e^{\frac{RP+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} \quad \text{und} \quad Pdx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-2\beta}{\beta}} dR$$

und

$$PRdx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} dR$$

Es muss aber R eine solche Funktion von x sein, dass R^{n+1} so für $x = 0$ wie für $x = 1$ gesetzt verschwindet. Aber einen Bruch solcher Art anzugeben, ist eine um vieles schwerere Aufgabe als für die übrigen Fälle. Und ich werde daher nicht versuchen, diesen Fall mit derselben Methode aufzulösen, sondern werde ihn für eine anderen nun darzulegende Methode aufbewahren.

§75 Von dieser Methode, zu Kettenbrüchen zu gelangen, habe ich freilich schon vor einiger Zeit eine Erwähnung gemacht, aber weil ich ja dann nur einen speziellen Fall behandelt habe, wird es gefällig sein , sie hier gründlicher darzulegen. Sie ist aber nicht wie die vorhergehende in Integralformeln enthalten, sondern in der Auflösung einer Differentialgleichung, ähnlich der, die ein gewisser Graf Riccati vorgelegt hat. Ich betrachte natürlich diese Gleichung

$$ax^m dx + bx^{m-1}ydx + cy^2dx + dy = 0$$

die, indem festgelegt wird

$$x^{m+3} = z \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{cx} + \frac{1}{xxz}$$

in diese übergeht

$$\frac{-c}{m+3} t^{\frac{-m-4}{m+3}} dt - \frac{b}{m+3} t^{\frac{-1}{m+3}} zdt - \frac{ac+b}{(m+3)c} z^2 dt + dz = 0$$

die der ersten ähnlich ist. Wenn daher der Wert von z durch t bekannt wäre, würde zugleich y durch x bekannt werden. Es werde aber auf dieselbe Weise diese Gleichung auf eine andere ihr ähnlich zurückgeführt, indem festgelegt wird

$$t^{\frac{2m+5}{m+3}} = u \quad \text{und} \quad z = \frac{-(m+3)c}{(ac+b)t} + \frac{1}{t+v}$$

und Reduktion von dieser Art werde ins Unendliche fortgesetzt; danach, wenn alle letzteren Werte in den vorhergehenden eingesetzt werden, wird y auf die folgenden Weise ausgedrückt werden

$$y = Ax^{-1} + \cfrac{1}{-Bx^{m-1} + \cfrac{1}{Cx^{-1} + \cfrac{1}{-Dx^{m-1} + \cfrac{1}{Ex^{-1} + \cfrac{1}{-Fx^{m-1} + \text{etc}}}}}}$$

die Buchstaben A,B,C,D etc werden aber die folgenden Werte erhalten

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{c} \\
B &= \frac{(m+3)c}{ac+b} \\
C &= \frac{(2m+5)(ac+b)}{c(ac-(m+2)b)} \\
D &= \frac{(3m+7)c(ac-(m+2)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)} \\
E &= \frac{(4m+9)(ac+b)(ac+(m+3)b)}{c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b} \\
F &= \frac{(5m+11)c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)(ac+(2m+5)b)} \\
etc
\end{aligned}$$

welche Bestimmungen leichter mit den folgenden Gleichungen erfasst werden:

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{m+3}{ac+b}\\
BC &= \frac{(m+3)(2m+5)}{ac-(m+2)b}\\
CD &= \frac{(3m+7)(4m+9)}{ac-(2m+4)b}\\
EF &= \frac{(4m+9)(5m+11)}{ac+(2m+5)b}\\
FG &= \frac{(5m+11)(6m+13)}{ac-(3m+6)b}\\
etc
\end{aligned}$$

§76 Wenn nun diese Werte im gefundenen Kettenbruch eingesetzt werden , wird aufgefunden werden

$$cxy = 1 + \cfrac{(ac+b)x^{m+2}}{-(m+3) + \cfrac{(ac-(m+2)b)x^{m+2}}{(2m+5) + \cfrac{(ac+(m+3)b)x^{m+2}}{-(3m+7) + \cfrac{(ac-(2m+4)b)x^{m+2}}{(4m+9)+\text{etc}}}}}$$

Aus diesem Ausdruck ist es offenkundig, dass die vorgelegte Gleichung in den Fällen uneingeschränkt integrierbar ist, in denen b einem gewissen Term dieser Progression gleich wird

$$-ac\ ,\quad \frac{-ac}{m+3},\quad \frac{-ac}{2m+5},\quad \frac{-ac}{3m+7},\cdots \frac{-ac}{im+2i+1}$$

darauf auch in den Fällen, in denen b ein Term dieser Progression ist

$$\frac{ac}{m+2},\quad \frac{ac}{2(m+2)},\quad \frac{ac}{3(m+2)},\quad \cdots \frac{ac}{im+2i}$$

Aber dieser Kettenbruch der vorgelegten Gleichung bietet das Integral dieser Bedingung dar, dass für $x = 0$ $cxy = 1$ wird, wenn freilich $m+2 > 0$ ist; aber wenn $m+2 < 0$ ist, dann befolgt das Integral dieses Gesetz, dass für $x = \infty$ gesetzt $cxy = 1$ wird.

§77 Wir wollen festlegen, dass $b = 0$ und $a = hc$ ist und nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird; es wird aus dieser Gleichung

$$ncx^m dx + cy^2 dx + dy = 0$$

der folgende Kettenbruch hervorgehen, mit welchem der Wert von y in dem Fall bestimmt werden wird, in dem $x = 1$ gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{c} + \cfrac{n}{\cfrac{-(m+3)}{c} + \cfrac{n}{\cfrac{2m+5}{c} + \cfrac{n}{\cfrac{-(3m+7)}{c} + \cfrac{n}{\cfrac{4m+9}{c} + \text{etc}}}}}$$

oder es werde $c = \frac{1}{\chi}$ gesetzt; aus der Gleichung

$$nx^m dx + y^2 dx + \chi dy = 0$$

wird sich der Wert von y im Fall, in dem $x = 1$ ist, so verhalten

$$y = \chi + \cfrac{n}{-(m\chi + 3\chi) + \cfrac{n}{2m\chi + 5\chi + \cfrac{n}{-(3m\chi + 7\chi) + \text{etc}}}}$$

oder

$$y = \chi - \cfrac{n}{m\chi + 3\chi - \cfrac{n}{2m\chi + 5\chi - \cfrac{n}{3m\chi + 7\chi - \cfrac{n}{4m\chi + 9\chi - \text{etc}}}}}$$

§78 Wenn also dieser Kettenbruch vorgelegt ist

$$b + \cfrac{1}{b + \beta + \cfrac{1}{b + 2\beta + \cfrac{1}{b + 3\beta + \cfrac{1}{b + 4\beta + \text{etc}}}}}$$

wird sein

$$\chi = b, \quad n = -1, \quad (m+2)b = \beta$$

oder

$$m = \frac{\beta}{b} - 2$$

Daher wird der Wert dieses Kettenbruches der Wert von y in dem Fall, in dem $x = 1$ ist, aus dieser Gleichung sein

$$x^{\frac{\beta - 2b}{b}} dx = y^2 dx + b dy$$

nachdem die Integration so unternommen worden ist, dass für $x = 0$ gesetzt $xy = b$ wird, weil gilt

$$m + 2 > 0$$

wenn freilich $\frac{\beta}{b}$ eine positive Zahl ist.